CHAP G4 # Triangles : Calculer une longueur (1)

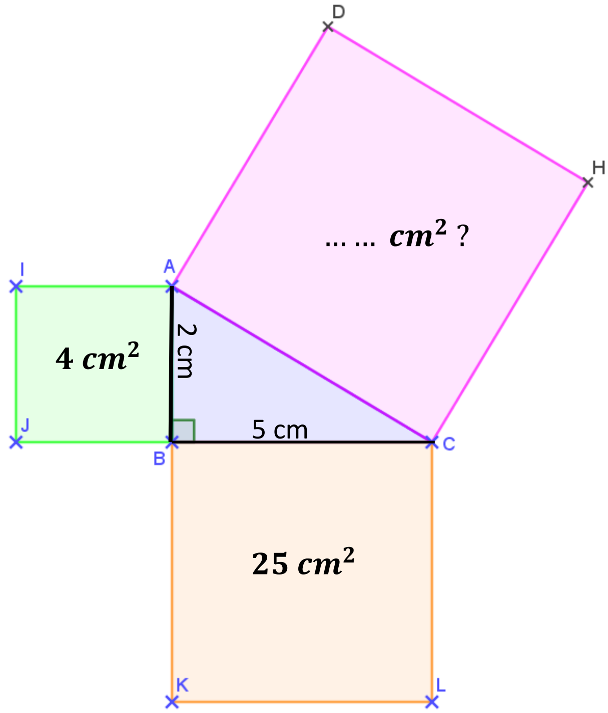
I. Le théorème de Pythagore

Théorème :
Si un triangle est rectangle,
Alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit.
Autrement dit l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B et son hypoténuse est [AC].
AB = 2 cm donc $aire\ ABJI = 4\ cm^2$
BC = 5 cm donc $aire\ BCLK = 25\ cm^2$

Donc, d'après le théorème de Pythagore,

$aire\ ACHD = aire\ ABJI + aire\ BCLK$
$aire\ ACHD = 4 + 25$
$aire\ ACHD = 29\ cm^2$



Le théorème de Pythagore permet donc de calculer des aires à partir des côtés du triangle rectangle.
Mais il permet également de calculer des longueurs grâce à un nouvel « outil » : la racine carrée d'un nombre positif.

II. Racine carrée d'un nombre positif

Définition : Soit a un nombre positif.
On appelle racine carrée de a, le nombre positif dont le carré est égal à a.
La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$.

Exemples : $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 3 \times 3 = 9$
$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ car $(1{,}2)^2 = 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$

Pour faciliter les calculs, il est utile de connaître les 15 premiers carrés parfaits :

$\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{49} = 7$ $\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{121} = 11$ $\sqrt{144} = 12$ $\sqrt{169} = 13$ $\sqrt{196} = 14$ $\sqrt{225} = 15$

Remarques : **1.** La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas !
2. S'il ne s'agit pas d'un carré parfait, on utilise la calculatrice pour donner une valeur approchée.

III. Calculer des longueurs avec le théorème de Pythagore

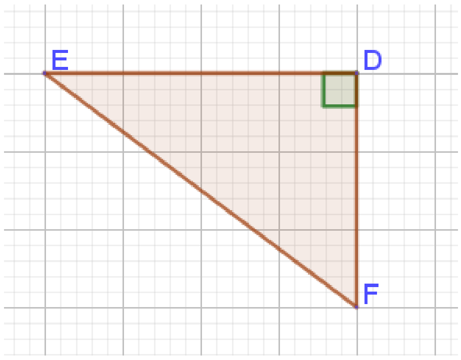
1. Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Exemple : *On considère un triangle DEF rectangle en D tel que* $DE = 4\ cm$ et $DF = 3\ cm$.
Calculer la longueur EF.

Méthode pour rédiger la démonstration :

1. On écrit les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème

On sait que le triangle DEF est rectangle en D.
Son hypoténuse est [EF].



2. On cite le théorème.

On utilise le théorème de Pythagore.

3. On écrit l'égalité de Pythagore avec les noms des côtés.

Alors $EF^2 = DF^2 + DE^2$

4. On remplace les lettres par les mesures que l'on connaît

$EF^2 = 3^2 + 4^2$

5. On effectue les calculs.

$EF^2 = 9 + 16 = 25$

6. On conclut en utilisant la racine carrée.

$EF = \sqrt{25} = 5\ cm$

2. Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Exemple : *On considère un triangle IJK rectangle en J tel que* $IK = 29\ cm$ et $IJ = 21\ cm$.
Calculer la longueur JK.

Méthode pour rédiger la démonstration :

On applique, au départ, les mêmes étapes que pour la longueur de l'hypoténuse :

1. On sait que le triangle IJK est rectangle en J d'hypoténuse [IK].
2. On utilise le théorème de Pythagore
3. Alors $IK^2 = IJ^2 + JK^2$
4. $29^2 = 21^2 + JK^2$
5. $841 = 441 + JK^2$
6. **On soustrait pour isoler JK^2.**
   $JK^2 = 841 - 441 = 400$
7. **On conclut en utilisant la racine carrée.**
   $JK = \sqrt{400} = 20\ cm$