Probabilités

Les probabilités vont nous permettre de prévoir la fréquence probable d'apparition de phénomènes lors d'expériences dont on ne connaît pas encore le résultat.

I. Notion de probabilité

1. Définitions

Définitions :

1) Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel résultat se produira.

2) Chacun de ces résultats est alors appelé une issue.

3) Un évènement est constitué d'une ou plusieurs issues.

Dans ce cas, on dit qu'une de ces issues réalise (ou est favorable à) l'évènement.

Exemple : Le lancer d'un dé cubique est une expérience aléatoire.

Les résultats possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il y a donc six issues possibles.

On peut considérer les évènements suivants :

Cinq : « On a obtenu 5 »

P : « On a obtenu un nombre pair. »

L'évènement Cinq est réalisé par l'issue 5 seulement.

L'évènement P est réalisé par les issues : 2, 4, 6 .

Définition : La probabilité d'un évènement A est la proportion globale, parmi tous les cas possibles, des cas où A est réalisé si on répète un grand nombre de fois l'expérience.
La probabilité de l'évènement A se note $p(A)$.

A RETENIR : $\textit{Dans une situation d'équiprobabilité, } p(A) = \dfrac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre total d'issues possibles.}}$

Exemple : On reprend l'expérience précédente dans laquelle P est l'évènement : « on obtient un chiffre pair ».
Le nombre d'issues favorables à l'évènement P est donc trois.
Or le nombre total d'issues possibles pour cette expérience est six.

On a donc p(A) = $\frac{3}{6}$ = 0,5

2. Propriétés

Propriétés :
La probabilité d'un évènement est TOUJOURS comprise entre 0 et 1.
La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple : Lors du lancer d'un dé cubique, on a :

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

Toutes les probabilités sont bien inférieures à 1 car $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$ et la somme des probabilités est bien égale à 1.

II. Evènements certains, impossibles, contraires

Définition : Un évènement impossible est un évènement qui ne peut pas se produire.
Un évènement certain est un évènement qui se produit à coup sûr.
L'évènement contraire d'un évènement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
On le note non A.

Exemple : Lors du lancer d'un dé cubique, on considère les évènements suivants :

B : « Le résultat est compris entre 0 et 7 »
C : « On a obtenu 8 »
D : « On a obtenu un chiffre pair »

B est un évènement certain car toutes les issues de cette expérience sont comprises entre 1 et 6 donc l'évènement B est toujours réalisé.
C est un évènement impossible : aucune face du dé ne porte le numéro 8 et donc C ne sera jamais réalisé.
Les issues qui réalisent D sont 2,4,6.
L'évènement Non D est donc réalisé par les issues 1,3,5. On peut définir l'évènement Non D par la phrase « On n'obtient pas un chiffre pair ».

Propriété :
Un évènement impossible a une probabilité égale à 0.
Un évènement certain a une probabilité égale à 1.

La somme des probabilités d'un évènement A et de son contraire Non A est 1 :

P(A) + p(nonA) = 1

Autrement dit p(nonA) = 1 – p(A)

Exemple : Lors du lancer d'un dé cubique, on considère l'évènement suivant :

2 est l'évènement « On a obtenu 2 »
Donc l'évènement non 2 est constitué des issues : 1, 3, 4, 5, 6.

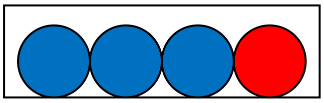
Donc p(non2) =$\frac{5}{6}$.
Or, p(2) =$\frac{1}{6}$
Ainsi p(2) + p(non2) =$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$

III. Expérience aléatoire à deux épreuves

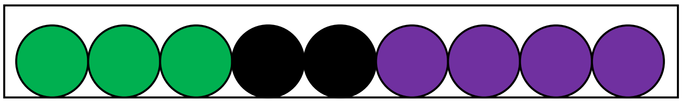
On considère une expérience aléatoire constituée de deux épreuves successives.

Propriété : Pour calculer une probabilité lors d'une expérience à deux épreuves, on utilise un tableau à double entrée :
* on indique les résultats possibles de la première expérience sur la première ligne
* on indique les résultats possibles de la deuxième épreuve dans la première colonne
* on calcule le nombre d'issues correspondant à chacune de ces possibilités

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire d'abord une boule dans l'urne 1 et on note sa couleur.
Puis on tire une boule dans l'urne 2 et on note sa couleur.



Urne 1



Urne 2

On construit le tableau à double entrée donnant les résultats de cette expérience :

- Sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne les résultats de la 1$^{\text{ère}}$ urne
- Sur la 1$^{\text{ère}}$ colonne, les résultats de la 2$^{\text{ème}}$ urne
- On calcule les effectifs correspondants :
  Par exemple, pour obtenir une boule bleue puis une boule verte : il y a trois boules bleues et trois boules vertes soit $3\times 3=9$ chances d'obtenir une boule bleue puis une boule verte.

	Boule bleue	**Boule rouge**	**Total**
Boule verte	**9**	**3**	**12**
Boule noire	**6**	**2**	**8**
Boule violette	**12**	**4**	**16**
Total	**27**	**9**	**36**

Si on veut calculer les probabilités correspondantes, il suffit ensuite d'utiliser la formule habituelle
Par exemple, si A est l'évènement « obtenir une boule noire puis une boule rouge »,
Alors : $p(A)=\frac{nombre\ \ d'issues\ \ favorable\ s}{nom\,bre\ \ total\ \ d'issues}=\frac{2}{36}=\frac{1}{12}$