Arithmétique (1) : PGCD

I. Rappels : Diviseurs, diviseurs communs et nombres premiers

Propriété et définition :
Si le reste de la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b est égal à zéro,
Alors on dit que a est un multiple de b
b est un diviseur de a
a est divisible par b

Exemples :

7 est-il un diviseur de 161 ?

$$\begin{array}{r|l} 161 & 7 \\ \hline -14 & 23 \\ 21 & \\ -21 & \\ 0 & \end{array}$$

On a : $161 = 7 \times 23 + 0$

Le reste de la division euclidienne est égal à 0.

Donc 7 est bien un diviseur de 161.

8 est-il un diviseur de 459 ?

$$\begin{array}{r|l} 459 & 8 \\ \hline -40 & 57 \\ 59 & \\ -56 & \\ 3 & \end{array}$$

On a : $459 = 8 \times 57 + 3$

Le reste de la division euclidienne n'est pas égal à 0.
Donc 8 n'est pas un diviseur de 459.

Remarque : Il est possible, grâce à quelques règles très simples, de savoir si un nombre est un multiple de 2, 3, 4, 5, 9 ou 10 sans effectuer la division. Ces règles sont appelées critères de divisibilité.

Propriété : critères de divisibilité
Un nombre est **divisible par 2**, s'il est pair (il se termine par **0, 2, 4, 6 ou 8**).
Un nombre est **divisible par 5**, s'il se termine par **0 ou 5.**
Un nombre est **divisible par 10**, s'il se termine par **0.**

Un nombre est **divisible par 4**, si les **2 derniers chiffres forment un nombre divisible par 4.**

Un nombre est **divisible par 3**, si la **somme de ses chiffres est divisible par 3.**
Un nombre est **divisible par 9**, si la **somme de ses chiffres est divisible par 9.**

Exemples :

416 est divisible par 2 mais pas par 5 ni par 10 car il se termine par 6.
416 est aussi un multiple de 4 car 16 est dans la table de 4.
$4 + 1 + 6 = 11$ et 11 n'est pas dans la table de 3 ni dans celle de 9. Donc 3 et 9 ne sont pas des diviseurs de 416.

Définition : Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples : Les premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11….
Par contre 42 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 1 et 42 mais aussi par 2, 6, 7…

A RETENIR (pour faciliter les calculs) :
Liste des nombres premiers inférieurs à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Définition : Dire qu'un nombre d est un diviseur commun à deux nombres entiers a et b revient à dire que les nombres a et b sont tous les deux divisibles par d.

Exemple : 6 est un diviseur commun à 12 et à 18 car $12 = 2 \times 6$ et $18 = 3 \times 6$

II. Décomposition en produit de facteurs premiers et PGCD

Définition et propriété : On peut toujours décomposer un nombre en produit de plusieurs facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Exemple : On veut décomposer 588 en produit de facteurs premiers.

$$588 \div 2 = 294$$
$$294 \div 2 = 147$$
$$147 \div 3 = 49$$
$$49 \div 7 = 7$$
$$7 \div 7 = 1$$

Ainsi, la décomposition en produit de facteurs premiers de 588 est :

$$588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$$

Méthode : Pour trouver facilement un diviseur commun à deux nombres, on utilise la décomposition en facteurs premiers de ces deux nombres.

Exemple : Trouver le plus grand diviseur commun (PGCD) à 84 et 270.

1. On cherche la décomposition en facteurs premiers de ces deux nombres :
   Ici :

$84 \div 2 = 42$	$270 \div 2 = 135$
$42 \div 2 = 21$	$135 \div 5 = 27$
$21 \div 3 = 7$	$27 \div 3 = 9$
Donc $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$	$9 \div 3 = 3$
	Donc $270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

2. On trouve le plus grand diviseur commun à ces deux nombres, en multipliant entre eux tous les diviseurs communs qui apparaissent dans ces décompositions.
   Ici : $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ et $270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$
   Les diviseurs communs sont 2 ; 3 et $2 \times 3 = 6$.
   Donc le plus grand diviseur commun est 6.
   $PGCD(84\,;\,270) = 6$

Remarque : Pour trouver le plus grand diviseur commun à deux nombres, on peut également établir la liste de tous les diviseurs de chaque nombre puis ne conserver que les diviseurs qui se trouvent dans les deux listes.