CHAP 12

Equations

I. Equations

Définition :

1. Une équation est une égalité entre deux expressions contenant une inconnue (qui est le plus souvent notée x)
2. Une solution d'une équation est une valeur que l'on peut attribuer à la place de l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.
3. Résoudre une équation, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Exemple : $3x + 4 = 5x - 6$ est une équation d'inconnue x.
5 est une solution de cette équation.
En effet, si $x = 5$, alors $3x + 4 = 3 \times 5 + 4 = 19$ et $5x - 6 = 5 \times 5 - 6 = 19$ donc l'égalité est vraie.
Par contre, 0 n'est pas une solution de cette équation.
En effet, si $x = 0$, alors $3x + 4 = 3 \times 0 + 4 = 4$ et $5x - 6 = 5 \times 0 - 6 = -6$ donc l'égalité n'est pas vraie.

Propriété : On ne change pas les solutions d'une équation si :
- On développe, on réduit ou on factorise un (ou les deux) membre(s) de l'équation ;
- On additionne ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'équation ;
- On multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par un même nombre non nul

Cette propriété permet de résoudre les équations.

Méthode : Résoudre une équation du premier degré
Exemple : Résoudre l'équation suivante : $3x - 2 = -5x + 7$

1. On met tous les termes en x à gauche :
$$3x - 2 + 5x = -5x + 7 + 5x$$
$$3x + 5x - 2 = 7$$
$$8x - 2 = 7$$
2. On met tous les termes constants à droite :
$$8x - 2 + 2 = 7 + 2$$
$$8x = 7 + 2$$
$$8x = 9$$
3. On divise par le coefficient devant x :
$$\frac{8x}{8} = \frac{9}{8}$$
$$x = \frac{9}{8}$$
4. On conclut : La solution de cette équation est $x = \frac{9}{8}$

Remarques : 1. Une équation du premier degré a toujours une seule solution.

2. On peut « traduire » la propriété précédente en disant que, lorsqu'on « déplace » un terme de l'autre côté du signe « = » :

$$+ \ devient \ -$$
$$- \ devient \ +$$
$$\times \ devient \ \div$$
$$\div \ devient \ \times$$

II. Modéliser une situation

Méthode : Pour résoudre un problème…

1. On choisit l'inconnue x en fonction de ce que l'on cherche (c'est-à-dire de la question qui nous est posée)
2. On traduit les données de l'énoncé du problème par une équation.
3. On résout l'équation.
4. On interprète la solution pour répondre à la question posée dans le problème.

Exemple : *Agnès a 3 ans de moins que Soukayna et Adam a le double de l'âge d'Agnès. A eux trois, ils ont 107 ans. Quel est l'âge d'Agnès ?*

1. On choisit l'inconnue : On appelle x l'âge d'Agnès

2. On traduit l'énoncé :
Agnès a x ans.
Soukayna a $x+3$ ans.
Adam a $2x$ ans.
Donc $x+(x+3)+2x=107$

3. On résout :
$$x+x+3+2x=107$$
$$4x+3=107$$
$$4x+3-3=107-3$$
$$4x=104$$
$$\frac{4x}{4}=\frac{104}{4}$$
$$x=26$$

4. On interprète : Agnès a donc 26 ans.

III. Cas particuliers : équations-produit et équations du type $x^2=a$

En 3ème, on apprend essentiellement à résoudre des équations du premier degré.
Néanmoins, il existe des équations de degré supérieur ; par exemple $3x^2-5x+7=4x^2-2x+8$ est une équation du second degré…
Vous apprendrez à résoudre ces équations en 2de mais il existe deux types d'équations du second degré que vous devez savoir résoudre dès cette année : les équations-produit et les équations du type $x^2=a$.

1. Les équations-produit

Définition : Une équation-produit est une équation dans laquelle le premier terme est constitué d'une multiplication et le deuxième terme est égal à 0.

Exemple : $(3x+2)(4x-9)=0$ *et* $4x(3x+7)=0$ sont des équations-produit.

Propriété : Un produit est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul.
Autrement dit, si a et b sont deux nombres relatifs,
pour que $a\times b=0$, il faut que $a=0$ ou $b=0$

Cette propriété permet de résoudre les équations-produit.

Exemple : On veut résoudre l'équation $(2x+3)(4-7x)=0$

Un produit est nul si l'un des deux facteurs est nul.
Donc $(2x+3)(4-7x)=0$ si $(2x+3)=0$ ou si $(4-7x)=0$
On résout ces deux équations :

$2x+3=0$	$4-7x=0$
$2x+3-3=0-3$	$4-7x-4=0-4$
$2x=-3$	$-7x=-4$
$\frac{2x}{2}=\frac{-3}{2}$	$\frac{-7x}{-7}=\frac{-4}{-7}$
$x=-1{,}5$	$x=\frac{4}{7}$

Donc l'équation $(2x+3)(4-7x)=0$ a deux solutions : $-1{,}5$ et $\frac{4}{7}$.

2. Les équations du type $x^2=a$

Propriété : Soit a un nombre relatif.

- Si $a<0$, l'équation $x^2=a$ n'a aucune solution.
- Si $a=0$, l'équation $x^2=a$ a une seule solution $x=0$.
- Si $a>0$, l'équation $x^2=a$ a deux solutions : $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$

Exemple : On veut résoudre l'équation $7x^2-9=2x^2+36$

1. On se ramène à une équation du type $x^2=a$:

$$7x^2-9+9=2x^2+36+9$$
$$7x^2=2x^2+45$$
$$7x^2-2x^2=2x^2+45-2x^2$$
$$5x^2=45$$
$$\frac{5x^2}{5}=\frac{45}{5}$$
$$x^2=9$$

2. On résout l'équation : 9 est un nombre positif donc l'équation $x^2=9$ a deux solutions :

$$x=\sqrt{9}=3 \text{ et } x=-\sqrt{9}=-3$$

Finalement l'équation $7x^2-9=2x^2+36$ a deux solutions : 3 et -3.