Agrandissement et réduction dans le plan

I. Agrandir/ réduire une figure du plan

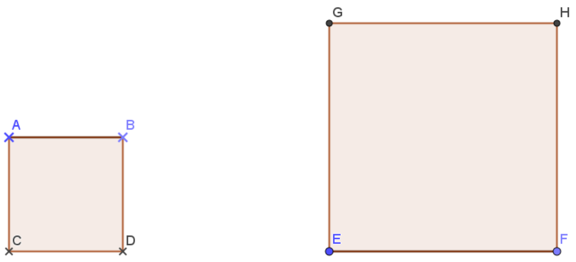
Définition : Agrandir ou réduire une figure du plan, c'est construire une figure de même forme mais en multipliant les longueurs de la figure initiale par un nombre k strictement positif.

Le nombre k est appelé le coefficient d'agrandissement ou de réduction :
- Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement de la figure initiale.
- Si $k = 1$, il s'agit d'une reproduction de la figure initiale.
- Si $k < 1$, il s'agit d'une réduction de la figure initiale.

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction, on peut calculer la valeur du coefficient grâce à la formule suivante : $k = \frac{nouvelle\ longueur}{longueur\ initiale}$

Propriété :
Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :
- L'alignement et les mesures des angles sont conservés ;
- Les longueurs sont multipliées par k ;
- Les aires sont multipliées par k^2

Exemple :



Le carré EFHG est un agrandissement de rapport 2 du carré ABDC.
Les longueurs ont été multipliées par 2 et l'aire du carré EFHG est 4 fois plus grande que celle du carré ABDC car $2^2 = 4$

II. Triangles semblables

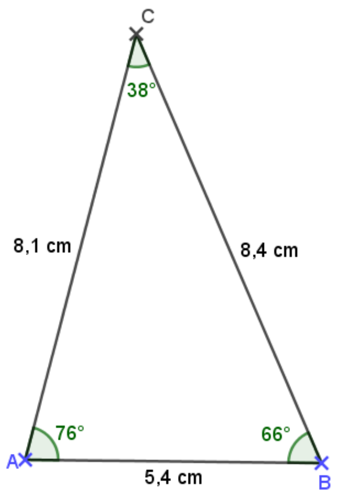
D'après ce que l'on a vu dans le paragraphe précédent, lorsqu'on fait un agrandissement ou une réduction d'un triangle, on obtient un triangle de même forme.
On dit que le triangle initial et son image par agrandissement ou réduction sont des triangles semblables.

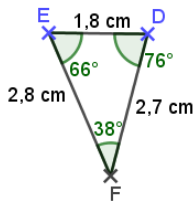
Définition et propriété : Deux triangles semblables sont des triangles de même forme c'est-à-dire :
- Ils ont leurs angles de même mesure
- Les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles

Exemple :

Les triangles ABC et DEF ci-contre sont semblables :

- Leurs angles sont égaux
- Leurs côtés sont proportionnels car les longueurs des côtés du triangle ABC sont 3 fois plus grandes que les longueurs des côtés du triangle DEF.





Définition : Lorsque deux triangles sont semblables, deux sommets appartenant chacun à l'un de ces triangles sont dits homologues lorsqu'ils sont les sommets de deux angles égaux.

Exemple : Dans l'exemple précédent, les triangles ABC et DEF sont semblables.

Les sommets A et D sont homologues (car $\hat{A} = \hat{D} = 76°$)
Les sommets B et E sont homologues (car $\hat{B} = \hat{E} = 66°$).
Les sommets C et F sont homologues (car $\hat{C} = \hat{F} = 38°$)

Remarque : On peut également parler de côtés homologues : ce sont deux côtés de longueurs proportionnelles.

On peut facilement les retrouver lorsqu'on a identifié les sommets homologues.

Dans notre exemple, les sommets homologues sont :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & E & F \end{array}$$

Alors les côtés [BC] et [EF] sont homologues.

Méthode : Pour montrer que deux triangles sont semblables, il suffit de montrer que :

- Soit ils ont leurs trois angles égaux
- Soit ils ont leurs trois côtés proportionnels ;
- Soit ils ont deux paires de côtés proportionnels et l'angle compris entre les deux côtés de la même mesure.

On utilise donc une des trois propriétés ci-dessous :

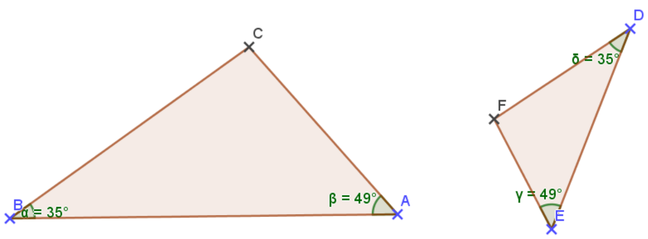
Propriété AAA : Si deux triangles ont deux angles de même mesure,
Alors ces deux triangles sont semblables.

Propriété CCC : Si deux triangles ont leurs trois côtés deux à deux proportionnels,
Alors ces deux triangles sont semblables.

Propriété CAC : Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux paires de côtés proportionnels, Alors ces deux triangles sont semblables.

Remarque : Le théorème de Thalès est donc en réalité un cas particulier de cette dernière propriété.

Exemple :



Les triangles ABC et DEF ont deux angles de même mesure.
D'après la propriété AAA, ce sont donc des triangles semblables.